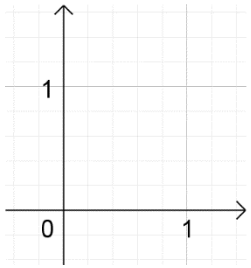
Méthode de Monte-Carlo

Dans un repère orthonormé, on considère les surfaces C et P définies respectivement par : $C = \{ M(x;y) \ / \ 0 \leq x \leq 1 \ ; \ 0 \leq y \leq 1\}$

et : $P = \{ M(x;y) \ / \ 0 \leq x \leq 1 \ ; \ 0 \leq y \leq x^2\}$



1) Identifier ces deux surfaces et les représenter dans le repère fourni. Déterminer l'aire de C.

Le but de l'activité est de déterminer des valeurs approchées de l'aire de la surface P à l'aide d'une méthode probabiliste.

On admet que lorsqu'on tire aléatoirement un point dans C, la probabilité qu'il soit dans P vaut $\frac{Aire(P)}{Aire(C)}$. Ainsi, lorsqu'on tire aléatoirement plusieurs points dans C, la fréquence de ces points qui sont dans P fournit une valeur approchée de $\frac{Aire(P)}{Aire(C)}$, d'autant plus précise que le nombre de points est grand.

On fournit le programme Python ci-contre (fichier « Monte_Carlo_eleve »).

```python
#import des bibliotheques
from random import*
import matplotlib.pyplot as plt


def MonteCarlo():

    # generation de coordonnees aleatoires entre 0 et 1 pour un point M dans C
    x,y=random(),random()
    # placement du point M dans le repere (en bleu)
    plt.scatter(x,y,color='blue')

    # reglage des bornes des axes du repere
    plt.axis([0,1,0,1])
    # ouverture de la fenetre graphique et affichage
    plt.show()
    # attente d'une action de clic sur la fenetre puis fermeture
    plt.waitforbuttonpress()
    plt.close()

    return None
```

2) Modifier la fonction **MonteCarlo** pour qu'elle reçoive un entier **n** en argument et place **n** points aléatoires de C sur le graphique.

3) Créer une fonction **dans_P** qui reçoit en argument les coordonnées $(x;y)$ d'un point de C et renvoie **True** si ce point appartient à P et **False** sinon.

4) Modifier la fonction **MonteCarlo** pour qu'elle place les points appartenant à C en rouge et les autres en bleu. On utilisera la fonction **dans_P** pour le test.

5) Modifier la fonction **MonteCarlo** pour :

a) qu'elle compte le nombre de points placés qui sont dans P ;

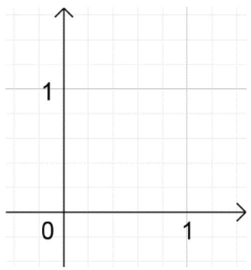
b) qu'elle calcule la fréquence **f** de ces points ;

c) qu'elle renvoie cette fréquence **f**.

On pourra également faire apparaître cette fréquence dans la fenêtre à l'aide de l'instruction suivante : plt.text(0,-0.1,"Fréquence des points dans P: "+str(f)).

6) En appelant la fonction **MonteCarlo** avec **n**=100 ; **n**=1000 ; **n**=10000 … donner des approximations de l'aire de la surface P.

7) On considère la surface $D = \{ M(x;y) \ / \ 0 \leq x \leq 1 \ ; \ 0 \leq y \leq 1 \ ; x^2 + y^2 \leq 1\}$.



a) Identifier cette surface D, et représenter C et D dans le repère fourni. Déterminer la valeur exacte de l'aire de D.

b) Adapter la méthode vue précédemment pour obtenir des approximations de π par la méthode de Monte-Carlo.